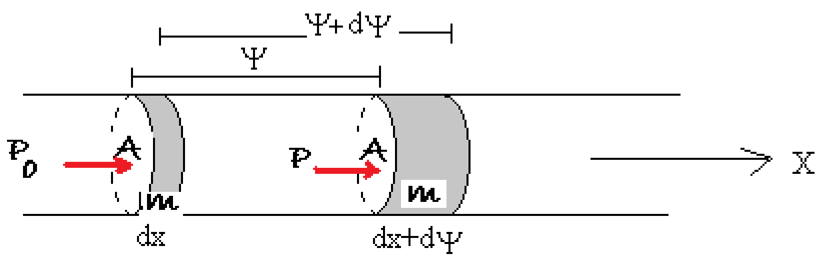
Velocidad del sonido en un gas

El razonamiento que se sigue para deducir la fórmula de la velocidad del propagación del sonido en un gas, es muy semejante al de las ondas en una barra elástica, pero con una diferencia importante. Los gases son muy comprensibles y su densidad cambia al modificarse la presión.

Consideremos de nuevo las dos partes del problema: la deformación del elemento de volumen que estaba inicialmente en la posición *x*, y su desplazamiento Ψ .

Deformación del elemento de volumen



La masa de gas contenida en el elemento de volumen, es la misma antes y después de la deformación

Si ρ_0 es la densidad del gas antes de pasar la perturbación, la densidad del elemento perturbado es

$\rho_0 A dx = \rho A(dx + d\boldsymbol{\psi})$ **, (masa iguales),cancelando A, se obtiene;**

$\rho_0 A dx = \rho A(dx + d\boldsymbol{\psi})$**, despejando :**

$\rho = \frac{\rho_0 dx}{1+\frac{d\psi}{dx}}$, simplificando por dx, tenemos:

Ahora bien ,

Hemos de tener en cuenta a efectos de notación (derivada parcial) que Ψ es una función de dos variables *x* (posición) y *t* (tiempo), y que el término que se suma a la unidad en el denominador es muy pequeño por lo que podemos aproximarlo usando el desarrollo del binomio de Newton $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ cuando $x<<1$

Entonces esta ultima expresión se puede anotar como:

$\rho = \rho_0(1 - \frac{d\psi}{dx})$,

$\rho = \rho_0 - \rho_0 \frac{d\psi}{dx})$, lo que nos lleva a:

$\rho - \rho_{0=} - \rho_0 \frac{d\psi}{dx})$,

Ecuación de estado

La presión es una función de la densidad. Dado que la diferencia de presión *p* respecto de la de equilibrio p_0 es muy pequeña podemos hacer aproximaciones que nos simplifican notablemente el resultado

$$p \approx p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0$$

La temperatura en una onda sonora no permanece constante. El gas localizado en una región de compresión está levemente más caliente que su temperatura de equilibrio. En las regiones vecinas, el gas está rarificado (el gas se ha expansionado), y su temperatura es ligeramente inferior a la de equilibrio. Medio periodo después, la región que estaba comprimida pasa a estar expandida, y así sucesivamente.

- A bajas frecuencias, el tiempo disponible entre sucesivas variaciones de la temperatura para que se pueda establecer el equilibrio térmico es grande, sin embargo, la longitud de las regiones es también grande. Por ejemplo, f=100 Hz, el periodo es P=0.01 s, y la longitud de onda es λ=340/100=3.4 m
- A altas frecuencias, el tiempo disponible entre sucesivas variaciones de la temperatura para que se pueda establecer el equilibrio térmico es pequeño, sin embrago, la longitud de las regiones es también pequeña. Por ejemplo, f=10000 Hz, el periodo es P=0.0001 s, y la longitud de onda es λ=340/10000=0.034 m

Newton supuso que la relación entre la presión y el volumen era la ley de Boyle, es decir, que la transformación era isoterma. En los libros de texto, se emplea una transformación adiabática argumentándose que no hay tiempo suficiente para que el calor fluya desde las regiones comprimidas (temperatura más alta) a las expandidas (temperatura más baja). Antes de que esto suceda, medio periodo después, la región que estaba comprimida pasa a estar expandida, y así sucesivamente. Esta argumentación, equivocadamente, nos sugiere que a altas frecuencias las ondas sonoras son más adiabáticas que a bajas frecuencias.

La solución se encuentra en la teoría de la absorción y dispersión de ondas sonoras elaboradas por Kirchhoff, Langevin y otros, la velocidad del sonido depende de la frecuencia. A bajas frecuencias, la velocidad del sonido se aproxima a la deducida suponiendo una transformación adiabática pV^{γ}=cte y a altas frecuencias, la velocidad del sonido se aproxima a la deducida utilizando la ecuación de la trasformación isoterma pV=cte.

La relación entre la presión y el volumen en una [transformación adiabática]es:

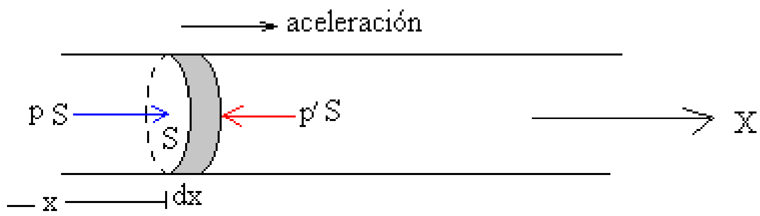
$$p_0V_0^{\gamma} = pV^{\gamma} \qquad \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} = \frac{p}{\rho^{\gamma}}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

La diferencia de presión p respecto de la de equilibrio p_0 es

$$p = p_0 - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \gamma p_0$$

Desplazamiento del elemento de volumen



Necesitamos ahora la ecuación del movimiento del volumen elemental que contiene una masa (densidad por volumen) $\rho_0 A\cdot dx$.

El gas a la izquierda del elemento de volumen lo empuja hacia la derecha con una fuerza *pS* y el gas que está a la derecha lo empuja hacia la izquierda con una fuerza *p'S*. Por tanto, la fuerza resultante en la dirección +X es

$$dF = (p - p')S = -S\cdot dp = S\gamma\, p_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx$$

Aplicando la segunda ley de Newton, fuerza igual a masa contenida en el elemento de por aceleración (derivada segunda del desplazamiento).

$$dF = (\rho_0 S dx)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Igualando ambas expresiones de la fuerza tenemos, la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Se puede demostrar que la presión p y la densidad ρ obedecen a la misma ecuación diferencial que el desplazamiento Ψ, con la misma velocidad de propagación v.

La fórmula de la velocidad de propagación es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

γ es el índice adiabático del gas (1.4 para el aire) y ρ_0 es la densidad (1.293 kg/m^3), y p_0 la presión normal (1 atm=1.013·10^5 Pa)

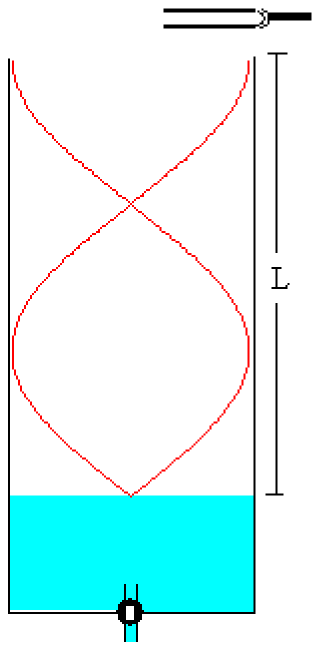
Con estos datos, la velocidad de propagación del sonido en el aire es *v*=331 m/s.

Gas	**Velocidad de propagación del sonido (m/s) a la presión de 1 atm**
Aire (0º C)	331
Alcohol etílico (97º C)	269
Amoniaco (0º C)	415
Gas carbónico (0º C)	259
Helio (0º C)	965
Hidrógeno (0º C)	1284
Neón (0º C)	435
Nitrógeno (0º C)	334
Oxígeno (0º C)	316
Vapor de agua (134 ºC)	494

Fuente: Manual de Física. Koshkin N. I. y Shirkévich M. G.. Editorial Mir, pág 107

Medida de la velocidad del sonido

Un diapasón es una varilla metálica en forma de U. El sonido emitido por el diapasón contiene una sola frecuencia que viene grabada en este dispositivo.



Conocida la frecuencia del diapasón se puede determinar la velocidad de propagación del sonido en el aire, mediante el dispositivo esquematizado en la figura. Disponemos de un recipiente de agua cuyo nivel podemos graduar. Situamos el diapasón muy cerca del recipiente y lo hacemos vibrar.

Hacemos descender el nivel del agua hasta que se perciba resonancia, es decir, una intensidad del sonido máxima.

Medimos la longitud *L* de la parte vacía y con estos datos se puede calcular la velocidad de propagación del sonido en el aire.

Las frecuencias de los distintos modos de vibración de un tubo cerrado responden a la fórmula

$$f = \frac{2n+1}{2}\frac{v_s}{L} \qquad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Actividades

- Se selecciona un diapasón que emite a una determinada frecuencia en el control de selección titulado **Frecuencia de los diapasones**

Se pulsa el botón titulado **Nuevo**

Para disminuir el nivel de agua en el recipiente, se actúa con el puntero del ratón sobre el círculo de color rojo situado a la derecha del recipiente. Se mueve este círculo muy despacio y se deja de pulsar el botón izquierdo del ratón cuando aparezca la representación de un modo de vibración del tubo cerrado por un extremo.

Ejemplo

Se ha seleccionado un diapasón que emite en la frecuencia de *f* =440 Hz. A continuación, se pulsa el botón titulado **Nuevo**. Cuando se ha vaciado el recipiente hasta el nivel que marca *L*=58 cm, se observa el segundo modo de vibración *n*=1. Introducimos los datos en la fórmula y despejamos la velocidad del sonido v_s.

$$440 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{4} \frac{v_s}{0.58} \qquad v_s = 340.3\text{m/s}$$

A partir de la medida de la velocidad del sonido en el aire 340 m/s, podemos determinar su índice adiabático γ.

Variación de la velocidad del sonido con la temperatura

La velocidad del sonido en un gas no es constante, sino que depende de la temperatura.

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

De la ecuación de un gas ideal *pV=nRT* o bien,

$$pV = \frac{m}{M} RT \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

La fórmula de la velocidad del sonido se expresa en función de la temperatura *t* del gas en grados centígrados.

$v = \sqrt{\gamma \frac{mRT_0}{MV} . \frac{1}{\rho}}$, como $\frac{m}{V} = \rho$, entonces:

$v = \sqrt{\gamma \frac{\rho R T_0}{M} . \frac{1}{\rho}}$, cuya expresión corresponde a :

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{M}}.$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}.$$

Para obtener esta expresión aproximada, se han tomado los dos primeros términos del desarrollo de $(1+t/T_0)^{1/2}$ por el binomio de Newton

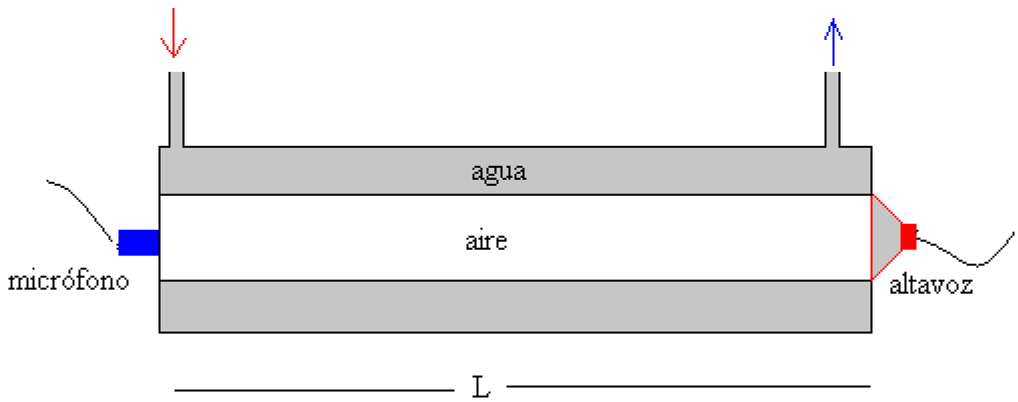
Sabiendo que T_0=273.15 K, γ=1.4, R=8.314 J/(K·mol) y M=28.95·10^{-3} kg/mol, tenemos que

$v_s \approx 331.4+0.61 \cdot t$

donde 331.4 m/s es la velocidad del sonido en el aire a 0ºC.

Para temperaturas cercanas a la ambiente, la velocidad del sonido en el aire varía aproximadamente de forma lineal con la temperatura.

El applet que viene a continuación, simula un experimento de medida de la velocidad del sonido a diferentes temperaturas. Consta de dos tubos coaxiales, de longitud *L*, el interior contiene aire y por el exterior circula agua a temperatura *t* procedente de un termostato. Un altavoz se coloca en el extremo del tubo interior y en el otro extremo un micrófono. El altavoz se conecta a un generador de sonido aleatorio, por ejemplo, a una radio que no sintoniza ninguna emisora concreta. El micrófono se conecta a un ordenador para analizar la señal que llega al extremo opuesto del tubo.

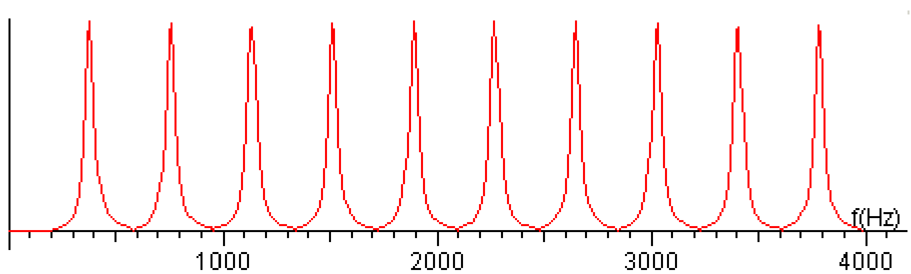


Las ondas estacionarias de un tubo cerrado por ambos extremos o de una cuerda de longitud *L* sujeta por ambos extremos, tienen las siguientes frecuencias

$$f_n = \frac{v_s}{2L} n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

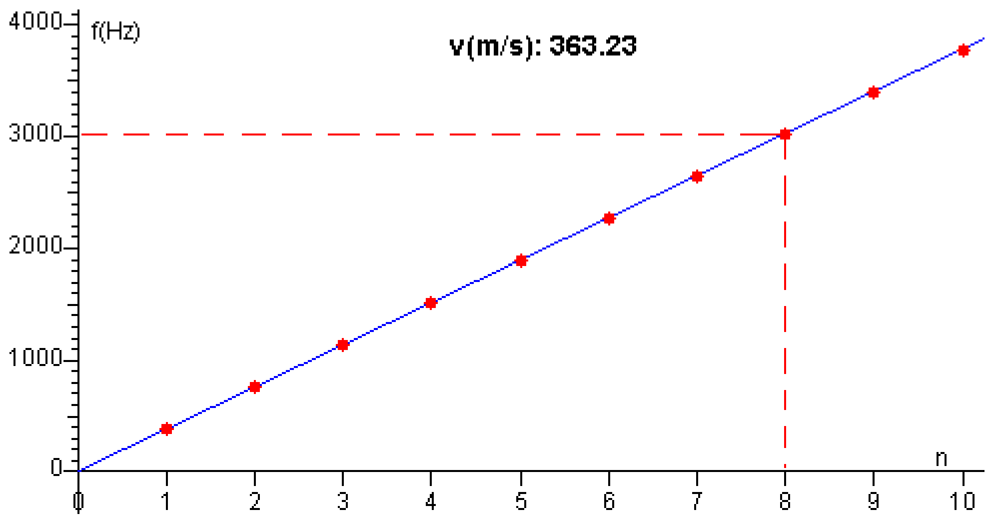
Midiendo la frecuencia f_n de un determinado armónico *n* se puede obtener la velocidad del sonido v_s, tal como hemos visto en la actividad anterior.

El ruido tiene un espectro continuo de frecuencias, y el tubo actúa como un filtro que selecciona sus frecuencias de resonancia, tal como se aprecia en la figura.



La señal recibida por el micrófono, se analiza en un ordenador, que determina las frecuencias correspondientes a los máximos de intensidad.

Para determinar la velocidad del sonido en el aire para una temperatura *t* dada, se representa gráficamente las frecuencias de resonancia f_n en función de *n*. La pendiente de la recta que mejor ajusta es $v_s/(2L)$. Conocido el valor de L=45 cm, se calcula la velocidad del sonido v_s.



Una vez que disponemos de suficientes pares de datos, (temperatura en grados centígrados, velocidad del sonido), representamos los "datos experimentales" y observamos que se ajustan aproximadamente a la recta

v_s=331.4+0.61·t

Referencias

Velasco S., Román F.L., González A, White J. A., *A computer-assisted experiment for the measurement of the temperature dependence of the speed of sound in air*. Am. J. Phys. 72 (2) February 2004, pp. 276-279.

Wu J., *Are sound waves isothermal or adiabatic?* Am. J. Phys. 58 (7) July 1990, pp. 694-696

Alonso M., Finn E. J. *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana (1995), págs. 642-644